

實驗 7：駐波

Standing Waves

編撰：國立清華大學物理系普物實驗課程團隊，版本：V2

一、目的

自然界有各種波動，本實驗將探究力學波的駐波。包含繩線、金屬環及彈簧的共振現象，探討產生駐波共振所需的條件。也可觀察力學波在不同形狀之金屬平板上的駐波行為，看到克拉尼共振圖形(Chladni resonance patterns)。

二、簡介

根據波動物質的振盪方向和波動傳遞方向兩者間的關係，可概分為橫波(transverse wave)和縱波(longitudinal wave)兩種波動模態。另根據波動的行進狀態，又可分為行進波(traveling wave)和駐波(standing wave)兩類型。有關波的各種分類方式和定義可自行參考普通物理課本有關波、聲波和電磁波等章節的介紹，或至相關物理教學網路上查詢。

本實驗主要觀察不同材質和形狀的物體內力學波的共振現象，測量不同共振模態時，波動所對應的共振頻率及駐波圖案。探究使波動達成共振現象的決定因素和條件。

根據不同的波動傳遞介質和介質形狀，本實驗分為下列五個子實驗。

A. 弦的橫波振盪與其駐波共振：

觀察繩線上的橫波運動及產生駐波共振的條件，探討波的傳播速率與繩線 張力 T 及線密度 μ 之間的關係。

B. 彈簧縱波共振：

觀察彈簧的縱波振盪及產生駐波共振的條件，探討波的傳播速率與彈簧的 力常數 k 、質量 m 及 長度 L 之間的關係。

C. 環形彈性線駐波共振：

觀察環形彈性線的駐波現象和產生共振的條件。此實驗除可用以探討環形樂器或其他相關共振系統的現象、工作原理和應用，亦可由此古典力學的駐波振盪現象，類比對應量子力學中的波爾原子模型(Bohr model of the atom)，其解釋原子中電子能階不連續的原因。

D. (選做) 金屬長條片的橫波振盪：

觀察不同長度之金屬長條片的橫向振盪現象，探討金屬條的長度和共振頻率間的關係。有助於瞭解奈米級與微米級之懸臂樑(Nano- and micro-scale cantilevered beam)的振盪現象和工作原理。

E. (選做) 二維共振之克拉尼圖案(Chladni patterns)：

觀察不同形狀之平板的二維駐波振盪和共振圖案，此即著名的克拉尼圖案。此實驗可瞭解傳播物質之邊界條件對波共振的影響，常用以說明平面式樂器、鼓器和小提琴等樂器的工作原理，應用在這些相關樂器的設計上。類似的實驗技巧更被用以檢測物體表面密度分佈、表面應力分佈的情形和尋找人眼無法觀測到的物體缺陷所在處等等。

三、實驗器材

1. 機械波驅動器 (mechanical wave driver，以下簡稱振動器)：PASCO SF-9324 或 PASCO WA-9855，一台。見圖 1(a)。

注意：振動器使用說明和注意事項，請見附錄 A。

2. 信號產生器 (Function Generator)及 BNC 接線，見圖 1(b)。
3. 功率放大器 (Power Amplifier)及香蕉接頭接線，見圖 1(c)。

注意：因振動器電阻僅約 $8\ \Omega$ ，且電流不可超過 $1\ \text{A}$ ，可輸入的電壓限制為 $8\ \text{V}$ 。但為避免振動器損壞，實驗時輸入振動器的電壓應小於 $2\ \text{V}$ 。由於放大器用旋鈕調整放大率時，最大可將電壓放大 20 倍，因此信號產生器的電壓請設定為 $200\ \text{mV}_{\text{PP}}$ ($= 0.2\ \text{V}_{\text{PP}}$ = 振幅 $0.1\ \text{V}$)，以避免振動器損壞。

4. 桌邊支撐夾具及滑輪、砝碼，1 組。
5. 繩線。註：取夠長的長度(例如超過 $2\ \text{m}$)，測量其長度及質量後，再綁到系統上做後續實驗。質量使用精密天平測量。
6. 普通電子天平(精度 $0.01\ \text{g}$)，各組 1 台。精密電子天平(放助教桌，共用)，2 台。
7. 珍珠板背板及支撐架，1 組。
8. 直立支撐架及橫桿，1 組。
9. 彈簧，1 條。見圖 2(a)。
10. 金屬共振條(片)組，1 組。見圖 2(b)。
11. 環形彈性線(金屬線環，wire loop)，1 組。見圖 2(c)。

注意：長時間大幅振盪金屬線時，有可能因金屬疲勞導致斷裂，因此勿使振幅過大。振盪時人勿太靠近，以免金屬線突然斷裂時被彈到。

12. $24 \times 24\ \text{cm}^2$ 正方形鋁製平板：PASCO WA-9607 方形克拉尼平板，見圖 3(a)。
13. 直徑 $24\ \text{cm}$ 圓形鋁製平板：PASCO WA-9607 圓形克拉尼平板，見圖 3(b)。
14. 鋁製小提琴形平板：PASCO SE-7319 小提琴形克拉尼平板，長約 $40\ \text{cm}$ ，見圖 3(c)。
15. 專用細沙(砂)：一瓶，觀察二維克拉尼共振圖案用。因細砂量有限，請小心並節省使用；盡量避免細砂流失，每次做完實驗，請務必回收。
16. 細砂收集箱：一個。
17. 灑砂瓶：一個，觀察二維克拉尼圖形共振用。



(a) 振動器



(b) 信號產生器



(c) 功率放大器

圖1、(a)振動器：PASCO SF-9324機械波驅動器，(b)信號產生器，(c) 功率放大器。



(a)



(b)



(c)

圖2、(a) 彈簧，(b) 金屬共振條(片)組，(c) 環形彈性線，固定於振盪器上做振盪。



(a)



(b)



(c)

圖3、(a) $24 \times 24 \text{ cm}^2$ 正方形和直徑 24 cm 圓形鋁製平板，及專用細砂與灑砂瓶。(b) $24 \times 24 \text{ cm}^2$ 正方形鋁製平板及 $(n, m) = (2, 2)$ 力學共振模態的典型克拉尼共振圖形。(c) 鋁製小提琴形平板及某一特定共振頻率時的典型克拉尼共振圖形。

實驗A：弦的橫波振盪與其駐波共振

一、目的

觀察繩線上的橫波運動及產生駐波共振的條件，探討波的傳播速率與繩線張力 T 及線密度 μ 之間的關係。

二、理論簡介

本實驗利用一條兩端固定、拉緊的繩線，研究其駐波現象。繩線上的駐波與吉他弦撥動後產生的駐波相似，不同的是，本實驗利用週期性的外力持續驅動繩線，使其振動得以維持，而不會因能量耗散而逐漸消失。

當繩線的一端受到週期性的外力驅動時，波動沿著繩線傳播，其波速為

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (1)$$

註：上述波速公式採用張力均勻、線密度固定的理想弦模型，實際繩線可能因材料彈性及拉伸特性而產生偏差。

其中， T 為繩線所受的張力， μ 為繩線拉伸後單位長度的質量(線密度)。波長 λ 、驅動頻率 f 與波速 v 之間的關係為

$$\lambda = v/f \quad (2)$$

當波動傳播至繩線的另一端時，會發生反射，反射波與入射波相互疊加。當波動在繩線兩端來回反射及疊加，在某些特定的頻率下，會形成穩定的駐波。駐波具有固定不動的節點或波節(node)與波腹(antinode)。節點是兩波持續發生完全破壞性干涉，振幅為零的位置；波腹則是兩波持續發生建設性干涉，振幅最大的位置。對於兩端固定、長度為 L 的繩線，形成駐波的條件為

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

其中， n 為正整數，代表駐波的模態階數。此條件表示，只有特定的波長，以及對應的特定頻率，才能在繩線上形成穩定的駐波。這些穩定的振動形式稱為系統的正常模態(normal modes)，而對應的頻率稱為固有頻率(natural frequencies)或共振頻率。

由公式(1)~(3)，可得共振頻率

$$f = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

由於邊界條件的限制，系統只允許某些離散的振動模態才可形成穩定的駐波，而非任意波長或頻率。這種離散性可視為一種古典波動系統的「量子化」類比。在微觀的原子世界中，量子力學描述的粒子同樣具有波動性。當粒子的波函數受到邊界條件或束縛位能的限制時，也可能形成離散的允許狀態，進而產生不連續的能階。雖然古典駐波與量子力學中的物質波具有不同的物理意義，但兩者都能說明波動性與系統限制條件如何導致離散的允許模態。

三、實驗裝置

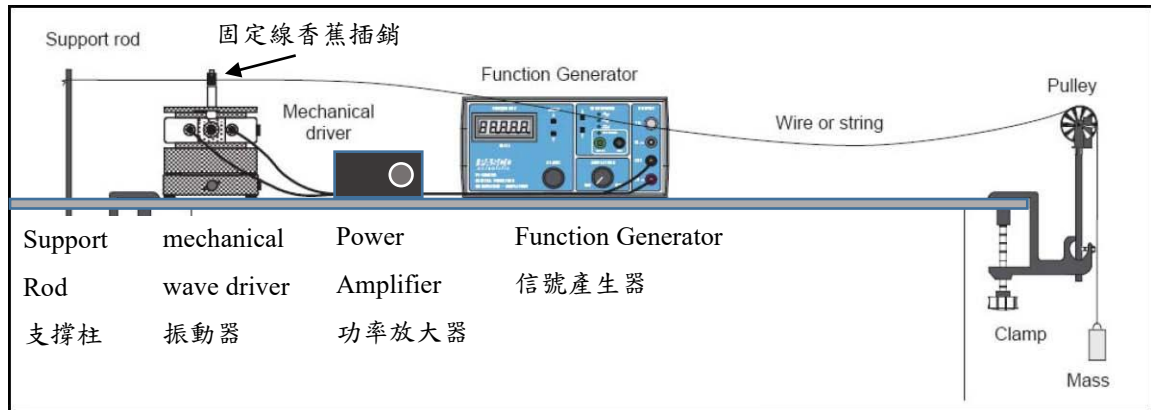


圖4、弦振動實驗裝置示意圖。

四、實驗步驟

1. 取一段線密度均勻的繩線(建議 2~4 m)，以捲尺測量繩線的總長度，並以精密天平稱量繩線的質量。根據此兩數據，計算繩線的線密度(linear density) μ 。
註：以捲尺測量長度時，應用手給予繩線適當的張力。
2. 將振動器上的驅動臂鎖定桿切到「鎖定(Lock)」位置。將有洞的香蕉型接頭插銷(固定線香蕉插銷)插入驅動臂頂端，繩線水平穿過插銷上的洞口(注意：此時固定線的螺絲先不鎖緊)，再綁在支撐柱上，如圖4所示。
註：之後做完實驗，欲拆卸受振物體時，也要將驅動臂鎖定桿再切回「鎖定(Lock)」位置，才可將香蕉插頭從驅動臂的插座上拆離。
注意：將繩線安裝到振動器的驅動臂上時，務必使驅動臂保持在鎖定狀態，並避免側向力 (sideways force)作用在驅動臂上。
3. 架設滑輪並調整高度，使繩線能保持水平。繩線從支撐柱，穿過插銷洞口，經過滑輪，應保持一直線。
4. 取砝碼與掛勾 總質量 m 約300 g，以一般電子天平測量其實際質量。參考圖4，用繩線垂直懸掛此質量，以施加 $T = mg$ 的張力。
注意：此時繩線是鬆動的穿過插銷上的洞口，未對驅動臂施加側向力。繩線僅靠支撐柱提供側向拉力。
5. 將驅動臂鎖定桿切換至「非鎖定狀態(Unlock position)」。用香蕉插銷上的螺絲將繩線固定於洞口。
6. 檢查功率放大器的旋鈕是在最小輸出(逆時針轉到底)。用兩條香蕉接頭接線連接振動器與功率放大器，參考圖1(c)。
7. 用BNC同軸電纜接線連接信號產生器與功率放大器。
注意：放大器的輸入口(Input)與輸出口(Output)有分左(L)、右(R)聲道，若振動器接在放大器的左聲道輸出，信號產生器的電壓也要從放大器的左聲道輸入。
要拔出BNC接頭時，要先輕壓再逆時針方向轉動。插入 BNC 接頭後，順時針轉動以扣住接頭。
8. 打開信號產生器的電源開關，信號產生器上選擇正弦波信號，並調整信號的振幅

(Amp選項)到**200 mVpp**。信號頻率(Freq選項)先設定100 Hz。然後按輸出(Output)送出電壓訊號。[註: 此時放大器未供電, 所以振動器還不會振動]

9. 先確認功率放大器的旋鈕保持在最小輸出(逆時針轉到底), 再打開功率放大器電源開關。慢慢順時針旋轉放大器的輸出旋鈕。觀察振動器是否開始產生振動。

注意: 不可以使振動器振動幅度過大, 以免損壞。當頻率較低時, 振動器振幅可能增加, 應隨時注意保持適當振幅。

10. 調整正弦波信號頻率, 找出駐波模態階數 $n=3$ (3段波包)的頻率。在此頻率附近微調頻率值(可切換頻率調整旋鈕的調整位數), 找到共振振幅最大時的頻率。
11. 用尺測量中間波包的長度(相鄰節點之間的距離)。由(3)式可知, 此距離等於 $\lambda/2$ 。
[註: 因振動器位置有振動, 不是節點, 而滑輪處的邊界點較難確認, 因此測量時應避免使用此兩處]

注意: 測量兩節點位置時, 建議尺靠近繩線, 由2人分別從兩節點的正側邊確認尺的讀值。避免一人同時確認兩節點位置, 因視角差產生測量錯誤。

12. 由實驗所得的頻率 f 與波長 λ , 計算出波速 $v = \lambda f$ 。
13. 調整正弦波信號頻率, 找出駐波模態階數 $n=4$ 的頻率。用尺測量中間2個波包的長度, 計算得到 波長 λ 與 波速 v 。
14. 調整正弦波信號頻率, 找出駐波模態階數 $n=5$ 的頻率。用尺測量中間3個波包的長度, 計算得到 波長 λ 與 波速 v 。

[註: 可依各班老師及助教指示, 取不同駐波模態階數 n]

15. 比較不同 駐波模態階數 n 所得的波速 v 。由(1)式可知, 此非彈性線繩的波速應與頻率無關。計算出波速的平均值與標準差。
16. 由 $\mu = \frac{T}{v^2} = \frac{mg}{v^2}$, 計算出繩線的線密度 μ 。與步驟1的結果比較。
17. 改變懸掛質量 m (改變4次以上)。由某一駐波模態階數 n 的共振頻率 f 及波長 λ , 測得波速 v 。(註: 只取1種階數 n 即可得到波速)

[註: 不同質量 m 的條件次數, 依各班老師及助教要求]

18. 由於 $T = \mu v^2$, 若以 T 為 y 軸, v^2 為 x 軸作圖, 線性擬合線的斜率即為線密度 μ 。由上面的實驗, 作 $T-v^2$ 圖, 得到擬合線的斜率與線密度 μ 。與步驟1的結果比較。
19. (自選) 可更換另一種線材, 用上述實驗方法得到線密度 μ 。

五、問題

1. 實驗所得的 $T-v^2$ 圖應該是過原點的直線。實際數據是否如此?若不是的話, 分析可能的原因。
2. 本實驗中所用的波速公式, 採用張力均勻、線密度固定的理想弦模型繩線。若採用具有明顯彈性及拉伸特性的繩線做實驗, 波速是否仍與頻率無關?

六、參考資料

1. 黃勝良、吳秀錦: 「普通物理實驗課本」, 實驗 10: 弦振動實驗, 國立清華大學出版社, 93年9月出版。

實驗B 彈簧縱波共振

一、目的

觀察彈簧的縱波振盪和其共振現象，並探討決定其共振頻率主要因素。

二、簡介

沿著彈簧長度方向傳播的縱波，可以觀察到疏密交替的現象，也就是一段壓縮區域之後，接著出現一段疏鬆區域。一端固定、另一端受到振動的彈簧，當波傳播到彈簧的一端時，會發生反射，並沿著彈簧往回傳播。去、回的波在共振條件時不斷疊加，可觀察到彈簧上有些位置幾乎保持靜止，稱為波節(node)；另一些位置則劇烈振動，稱為波腹(antinode)。

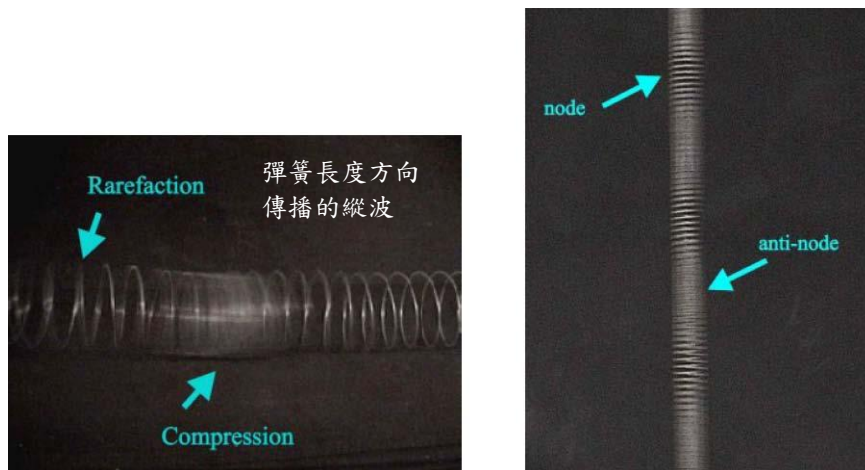


圖 5、當第一道波沿著彈簧反射返回時，第二道波正沿著彈簧向前傳播，這兩道波互相疊加。當彈簧的一端以共振頻率振動時，彈簧上便會形成駐波(standing wave)。

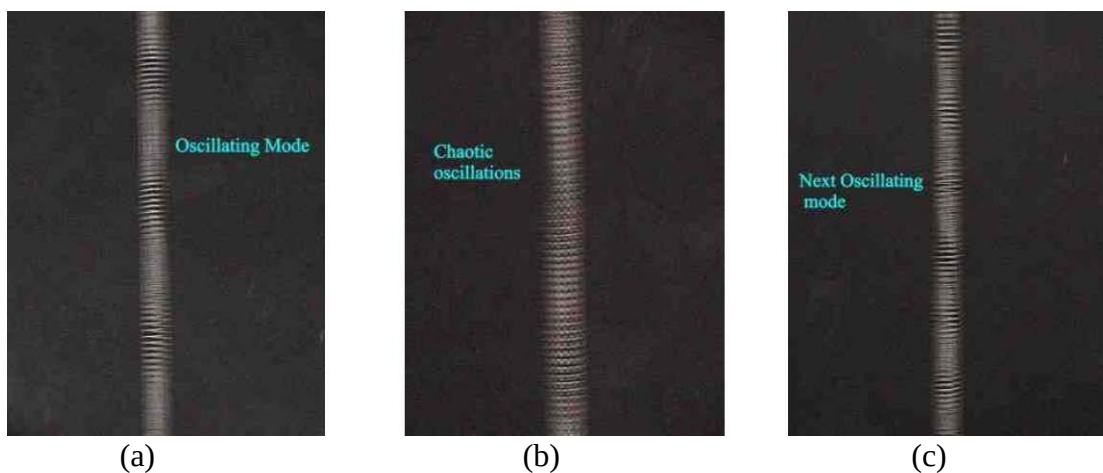


圖 6、隨著振動頻率逐漸增加，彈簧的振動情形會隨之改變：(a) 較低階振動模態的共振現象；(b) 不規則振動；(c) 再次發生共振，其振動模態的階數高於(a)。

當逐漸提高彈簧的振動頻率時，彈簧的振動會變得不規則。然而，當振動頻率逐漸接近另一個共振頻率時，彈簧上又會出現駐波。此時形成的新振動模態(或駐波圖樣)，會比前一個模態多出一個波節。如圖 6 所示。

理想均質彈簧縱波波速 v 的公式跟繩線橫波波速公式(1) $v = \sqrt{T/\mu}$ 相似。質量為 M ，兩端固定長度為 L 的彈簧，其縱波波速 v 的公式為

$$v = \sqrt{\frac{kL}{M/L}} = \sqrt{\frac{kL^2}{M}} = L\sqrt{\frac{k}{M}} \quad (4)$$

駐波的條件也跟繩線相似，為 $L = n\frac{\lambda}{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 。且 $v = \lambda f = \frac{2L}{n}f = L\sqrt{\frac{k}{M}}$ ，因此共振頻率

$$f = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{k}{M}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

註：上述公式採用均勻、線性彈性的理想連續彈簧模型，忽略重力造成的非均勻伸長及其他非理想效應。詳細推導可見參考資料。

三、實驗裝置圖

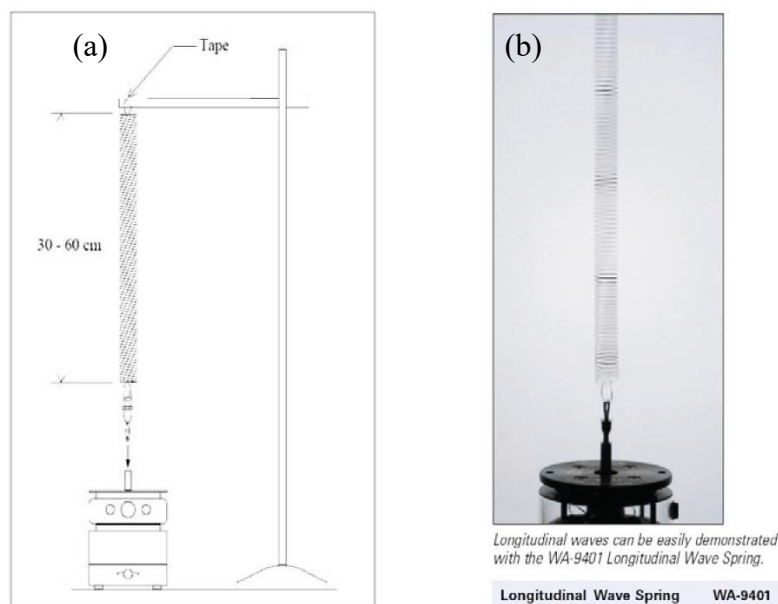


圖7、(a)彈簧縱波實驗儀器裝置圖，(b)典型的縱波共振情形。

四、實驗步驟

1. 將振動器的驅動臂鎖定桿切到「鎖定 (Lock)」態，將香蕉插銷插入驅動臂頂端。使彈簧的一端穿過插銷上的洞口，另一端穩固懸掛在支架的橫桿上(可用膠布固定)，調整支架使彈簧垂直拉伸至適當長度(約30~60公分)，如圖7(a)。
[注意：需小心香蕉插銷有插牢，若容易鬆脫請跟助教反應。]
註：之後做完實驗，欲拆卸受振物體時，也要將驅動臂鎖定桿再切回「鎖定 (Lock)」位置，才可將香蕉插頭從驅動臂的插座上拆離。
2. 確認功率放大器的旋鈕保持在最小輸出(逆時針轉到底)。將驅動臂鎖定桿切換至「未鎖定(Unlock)」。如實驗A的實驗裝置，將振動器連接放大器，放大器連接信號產生器。信號產生器上選擇**正弦波**信號，並調整信號的振幅(Amp選項)到**200 mVpp**。信號頻率(Freq選項)先設定10 Hz。然後按輸出(Output)送出電壓訊號。

[註: 此時放大器未供電, 所以振動器還不會振動]

3. 先確認功率放大器的旋鈕保持在最小輸出(逆時針轉到底), 再打開功率放大器電源開關。慢慢順時針旋轉放大器的輸出旋鈕。觀察振動器是否開始產生振動。

注意: 不可以使振動器振動幅度過大, 以免損壞。當頻率較低時, 振動器振幅可能增加, 應隨時注意保持適當振幅。

4. 使振幅約0.1公分, 慢慢增加頻率。當發現彈簧的部分地方近似靜止(此即節點), 有些地方振動得很劇烈(此即波腹點), 在那附近微調頻率, 找到共振頻率。必要時可些微調大或調小振幅, 讓駐波更明顯。記錄共振頻率 f 與駐波模態階數 n 。用捲尺測量此時的彈簧長度, 取中間多個波包用捲尺測量平均半波長($\lambda/2$, 亦即相鄰節點距離的平均值)。**[註: 避免將彈簧兩端視為節點作測量。原因?]**
5. 增加頻率, 再找到2個以上共振頻率。記錄不同駐波模態階數時的共振頻率 f 、駐波模態階數 n 、平均半波長 $\lambda/2$ 。

[註: 可依各班老師及助教指示, 取不同駐波模態階數 n]

6. 由實驗記錄及公式 $v = \lambda f$ 計算各條件所得波速 v 。得到波速 v 的平均值與標準差。各次實驗所得結果是否有一致性?
7. 理論公式(5)預期共振頻率 f 與駐波模態階數 n 成正比。實際是否如此? 畫出 f - n 關係圖並分析討論。
8. 理論公式(5)預期對同一個駐波模態階數 n , 共振頻率 f 相同, 與彈簧長度 L 無關。實際是否如此? 改變2次以上長度, 找到某一前面取過的駐波模態階數 n 對應的共振頻率 f , 記錄並比較其值是否變化。
9. 將彈簧下端從插銷上的洞口取下, 改懸掛砝碼與掛勾。取適當懸掛質量 m_1 讓彈簧長度約40~50公分。測量此時彈簧長度 L_1 。增加一些質量, 使懸掛質量為 m_2 , 測量此時彈簧長度 L_2 。**(註: 可多改變幾次質量)**
10. 由虎克定律 $\Delta F = k\Delta x$, 可得 $k = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{m_2g - m_1g}{L_2 - L_1}$ 。或由 ΔF 對 Δx 的關係圖, 由斜率得到力常數 k 。
11. 取下彈簧, 以電子秤測量彈簧質量 M 。
12. 由公式(4)計算出理論波速, 與前面數據得到的波速 v 比較。

五、參考文獻:

蔡尚芳, 與物體相連之彈簧的縱向振動, 《科學教育月刊》 240期 (2001/06) Pp. 39-43。

實驗C 環形彈性線駐波共振

一、目的

觀察環形彈性線的駐波現象和產生共振的條件。此實驗除可用以探討環形樂器或其他相關共振系統的現象、工作原理和應用，亦可由此古典力學的駐波振盪現象，類比對應量子力學中的波爾原子模型(Bohr model of the atom)，其解釋原子中電子能階不連續的原因。

二、理論

在古典物理的庫倫力模型中，電子是繞著原子核轉的粒子(依電子的速度或動能的大小決定繞行的軌道半徑)，且可以有任意的繞行半徑。但是繞行的電子應該會輻射能量，因此無法形成穩定原子。後來，科學家們從原子的光譜線得知原子中的電子只能處於某些特定能階，當電子從較高能階躍遷至較低能階時，會放出某些特定波長的光。此事實使得波爾與其他研究者感到困惑。1913年，波爾 (Bohr)提出著名的原子模型。波爾推論電子的軌道角動量是量子化的，只有具有某些角動量的電子穩定存在於原子上。背後的原因要到1924年路易士·德布洛伊(Louis de Broglie)提出物質波的構想才得以進一步了解。

德布洛伊認為粒子也具有波動性，稱為物質波。物質波的波長反比於粒子的動量。電子的物質波沿軌道繞行一周後，必須與原來的波保持相位一致以產生建設性疊加。亦即，軌道周長必須剛好為物質波波長的整數倍。最內層(第1層， $n = 1$)軌道的周長為電子物質波的波長，第2層軌道的周長則為物質波波長的2倍，以此類推。由此可推得角動量量子化，以及穩定電子能階的不連續性。

在其他微觀的物質世界中，量子力學描述的粒子(或系統)同樣具有波動性。當粒子的波函數受到邊界條件或束縛位能的限制時，也可能形成離散的允許狀態，進而產生不連續的能階。

本實驗使用振動器振動一環形彈性線，在特定頻率下環形圓周周長為振盪波長的整數倍，此時產生共振現象及環形駐波。此整數倍波長條件為理想環形波動的近似描述。實際金屬環的共振模態還會受到材料彈性、環的幾何形狀及固定方式影響，因此不能將其與電子物質波完全等同。

值得注意的是，不像先前繩波波速與振動頻率無關，在彈性線上波速與頻率是有關的。因此共振頻率 f 與駐波模態階數 n 不是成正比。假設兩者有 $f \propto n^\alpha$ 的冪次關係。由本實驗找出冪次 α 的值。若 $f = \gamma n^\alpha$ ，等式兩邊同取對數可得 $\log(f) = \log(\gamma) + \alpha \log(n)$ 。因此，若以 $\log(f)$ 為y軸，以 $\log(n)$ 為x軸作圖，其擬合線的斜率即為冪次 α 。
註： $f \propto n^\alpha$ 是待實驗驗證的近似冪次關係，不保證所有模態均遵循相同指數。

三、實驗裝置圖



圖8、環形彈性線共振實驗架設圖，圖中顯示 $n = 5$ 時的駐波。

四、步驟

1. 將振動器的驅動臂鎖定桿切到「鎖定 (Lock)」態。將帶有環形彈性線的香蕉插銷插入驅動臂頂端。如圖8所示。
註：之後做完實驗，欲拆卸受振物體時，也要將驅動臂鎖定桿再切回「鎖定 (Lock)」位置，才可將香蕉插頭從驅動臂的插座上拆離。
2. 確認功率放大器的旋鈕保持在最小輸出(逆時針轉到底)。將驅動臂鎖定桿切換至「未鎖定(Unlock)」。如實驗A、實驗B的實驗裝置，將振動器連接放大器，放大器連接信號產生器。信號產生器上選擇**正弦波**信號，並調整信號的振幅(Amp選項)到**200 mVpp**。信號頻率(Freq選項)先設定100 Hz。然後按輸出(Output)送出電壓訊號。[註：此時放大器未供電，所以振動器還不會振動]
3. 先確認功率放大器的旋鈕保持在最小輸出(逆時針轉到底)，再打開功率放大器電源開關。慢慢順時針旋轉放大器的輸出旋鈕。觀察振動器是否開始產生振動。
注意：不可以使振動器振動幅度過大，以免損壞。當頻率較低時，振動器振幅可能增加，應隨時注意保持適當振幅。
若振動振幅過大，金屬彈性線可能因金屬疲勞斷裂，請避免使用大振幅。觀察務必頭不要靠金屬彈性線太近。
4. 慢慢改變振動頻率，觀察環形彈性線上的振動情形。找到產生明顯駐波現象的共振頻率，以及其駐波模態階數 n (波包或波腹個數)。
5. 找到及記錄多個共振頻率與駐波模態階數 n (3個以上)。
[註：可依各班老師及助教指示，取不同駐波模態階數 n]
6. 以 $\log(f)$ 為 y 軸，以 $\log(n)$ 為 x 軸作圖，由擬合線的斜率得到冪次 α 。
7. (自選) 由上面 $\log(f)$ - $\log(n)$ 圖，可以預測其他產生共振的 駐波模態階數 n 出現在哪些頻率。試著在預期的頻率附近找找看，有些駐波模態階數 n 似乎不容易出現？為何？

實驗D 金屬長條片的橫波振盪 (選做)

一、目的：

觀察不同長度之金屬長條片的橫波振盪，用以說明條狀材料上的駐波和諧波現象，以及探討金屬條的長度、共振頻率和共振圖形間的關係。此實驗可用以驗證細長之懸臂樑之長度和振盪頻率與波長間的關係，此即是以片條狀物體發音之樂器的基本工作原理。並可藉此探討一般人眼和一般顯微鏡無法直接觀測到的奈米級與微米級之懸臂樑(Nano- and micro-scale cantilevered beam)的力學波振盪現象，故亦可藉此實驗，以瞭解懸臂樑的設計原理和工作原理。

二、器材

- 1 (mechanical wave driver, 簡稱振動器)：一台
- 2 (Sine wave generator)：一台
- 3 (片)：使用 PASCO SF-9404鋁製金屬片一組，此裝置中包含了六條長度不同，但單位長度之質量相同(即線密度相同)的長條金屬片。

三、實驗裝置圖

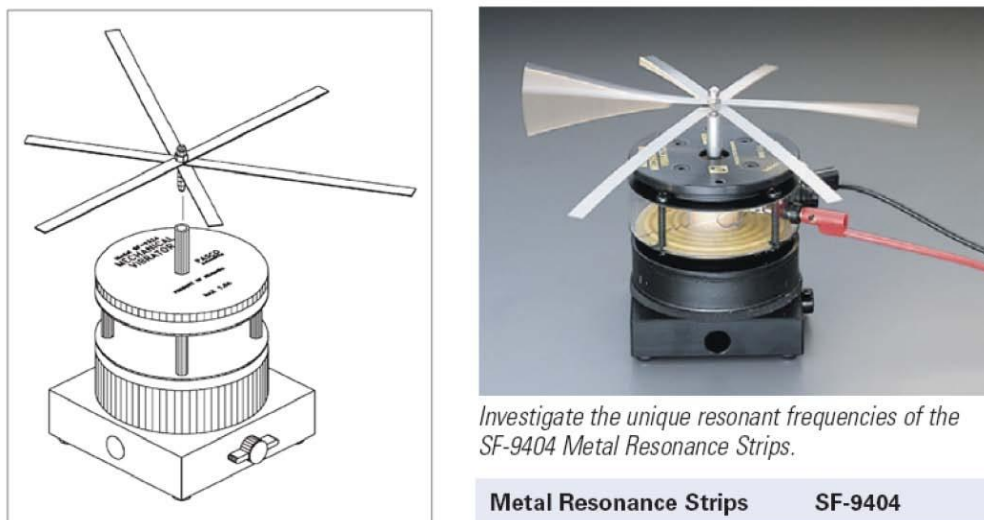


圖9、金屬共振條(片)與波動振動器的組裝圖和實體照片。

四、實驗步驟

1. 測量PASCO SF-9404金屬共振條(片)組上每一片金屬片的精確長度和寬度。
2. 旋轉六條金屬共振片的角度，使它們彼此之間的角度相同，如上圖9所示。
3. 將振動器上的驅動臂鎖定滑桿切滑到鎖定的位置(**"Lock" position**)後，才如圖9所示，將金屬共振片組底部的香蕉形插頭插入振動器之驅動臂上的香蕉插座內。然後，再將驅動臂鎖定滑桿切換至「非鎖定狀態(Unlock position)」。
4. 以約5 Hz頻率的正弦信號啟動振動器，然後緩慢地增加振動信號的頻率。觀察每一金屬片未固定之尾端隨信號振盪的情形，記錄下當尾端振盪振幅最大時的頻率，如圖9右側實體照片中左邊金屬條振盪振幅最大者所呈現的現象，此即該金屬片的共振頻率。共振達成時，可能必須調低驅動振幅的大小，以免驅動強度太強。可參用表1的實驗紀錄表格。

5. 根據所測得的數據，畫出金屬共振片的長度和共振頻率的關係圖，並推導兩物理量間的關係式。探討實驗所得的關係圖和關係式。
6. 改變六條金屬共振片彼此之間的角度，使它們彼此之間不再具有相同的角度，觀察角度對共振現象的影響。

表1 金屬片長度和共振頻率之關係測量實驗紀錄表

#	金屬片長度(m)	共振頻率-尾端振幅最大時之振盪頻率 (Hz)
1		
2		
3		
4		
5		
6		

五、問題

1. 請說明金屬共振片彼此之間的角度對共振現象的影響，並解釋其原因。
2. 以此實驗的結果，說明以片條狀物體發音之樂器的基本工作原理，如鋼琴、木琴、鐵琴等樂器。
3. 請根據此實驗結果解釋懸臂樑的設計原理和工作原理。
4. 微米級懸臂樑的應用？

實驗E 二維共振之克拉尼圖案 (選做)

一、目的

觀察不同形狀之平板的二維駐波振盪和共振圖案，此即著名的克拉尼圖案。此實驗之現象和簡易的實驗步驟，常用以說明平面式樂器、鼓器和小提琴等樂器的工作原理，目前並被大量應用在這些相關樂器的設計和共振頻率的測量上。類似的實驗技巧更被用以檢測物體表面密度分佈、表面應力分佈的情形和尋找人眼無法觀測到的物體缺陷所在處等等。更被藉以延伸對電磁波在物質中傳播時的瞭解，並探討無法直接以肉眼觀察的電磁波共振情形，瞭解傳播物質之邊界條件對電磁波共振的影響。

二、簡介

一條弦在共振頻率振動時，會在弦上固定的等間隔處產生節點與波腹點，而形成駐波。波動在二維介質中傳播，所產生的振盪可製造出更多樣化複雜的二維駐波圖案，例如金屬平板或鼓皮振盪所產生的多樣化駐波圖案。

十九世紀初期，克拉尼 (Ernst Chladni)發展出一種可以觀察二維振動波形的簡易技術。他將均勻的細砂撒在一片平板上，然後以小提琴的弓在平板的邊緣拉彈，以使平板產生特定頻率的振動。此時可觀察到細砂會停留在沒有振動產生的節線 (nodal lines, 節點的集合) 上。不在節線上的細砂會隨著波動的振盪持續跳動，直到細砂彈跳到節線處，並停留在不會振動的節線上。若振動的平板具有均勻的密度且對稱的形狀，則當施予的波動頻率改變，共振圖案會隨之立即跟著變化，而呈現各種不同的對稱圖案。可參考附錄B 2D Chladni Patterns。

三、實驗器材

1. 振動器：PASCO SF-9324力波驅動儀一台
2. 正弦波產生器(Sine wave generator)：PASCO PI-9598一台
3. $24 \times 24 \text{ cm}^2$ 方形鋁製平板：PASCO WA-9607方形克拉尼平板，見圖 3(a)或圖 15(a)。
4. 直徑 24 cm圓形鋁製平板：PASCO WA-9607圓形克拉尼平板，見圖 3(b)。
5. 小提琴形鋁製平板：PASCO SE-7319小提琴形平板，長約 40 cm，見圖 3(c)或圖 15(a)。
6. 專用細沙：觀察二維克拉尼圖形共振用
7. 灑(撒)砂瓶：一個，觀察二維克拉尼圖形共振

四、實驗裝置圖



圖10、二維克拉尼共振實驗裝置圖。

五、實驗步驟

1. 將振動器上的驅動臂鎖定桿(driver arm lock tab)切到「鎖定(Lock)」狀態。
2. 如圖10的實驗裝置圖所示，將 $24 \times 24 \text{ cm}^2$ 正方形鋁製平板上的香蕉插座直接插入位於驅動器上之驅動臂的香蕉型接頭上，使克拉尼平板連接到驅動器的傳動軸上。
3. 以水準儀校正克拉尼平板的水平，克拉尼平板必須盡量處於水平狀態。若水平情況太差的話，則在平板尚未開始振動之前，撒上細砂，細砂便會往較低的一側滑動。若有一點不水平的話，則在開始振動後，即使會有駐波圖案形成，但細砂會因重力作用，而容易往較低的一側跳動，以致僅能顯示一部份的駐波圖案，使得所觀測到的駐波圖案不完整、不對稱、不均勻。
4. 使用撒砂瓶將細砂均勻地撒於克拉尼平板上，剛開始時，不需要灑太多，當金屬平板開始振動後，可因需要再陸續撒一些細砂於平板上。細砂量的多寡以能清楚地觀察到駐波圖案來決定。細砂過多，則不易形成駐波圖案，或所呈現的駐波圖案不明顯、不清晰。
5. 將振動器上的驅動臂鎖定桿切換到「未鎖定(Unlock)」狀態。
6. 將信號產生器的輸出信號連接至振動器，並開始啟動信號產生器送出信號，實驗過程中請注意下列幾件事項：
 - (1) 駐波圖案的形狀決定於平板的形狀、大小、振動的頻率和平板的密度分佈和振動的振幅大小及細砂的量無關
 - (2) 但駐波圖案形成的難易程度和圖形的清晰度則和振動波的振幅、細砂的粒徑大小、細砂粒徑的均勻度和細砂量則有密切的關係。除細砂的粒徑需夠細、粒徑需盡量均一外，細砂的量需適量，過多或過少均不容易得到清晰的駐波圖案。所以，一開始細砂的量不要多，在實驗過程中，因需要再逐漸添加細砂的量即可。
 - (3) 振動信號的振幅也要適當。振幅太小，平板的振動振幅有限，細砂不易跳動。但振幅若太大，則細砂跳動幅度太大，不易穩定地停留在節點和節線上，導致駐波圖形不容易穩定成形。所以，一開始先使用小振幅，然後再慢慢調整波動振幅的量，使細砂能得到平穩的跳動，且能夠形成穩定清晰的駐波圖案為準。另也要注意，不同的頻率範圍，波動所需的適當振幅也不同，故隨頻率的改變，也需隨時重新調整適當的振幅量。

- (4) 本實驗中所使用的三種克拉尼平板的適當振動頻率範圍均在100 Hz 至5 kHz，更高頻率範圍當然也會有共振現象產生，但太高頻的共振，所獲得的共振節線將會太密或太複雜，以致在此三個平板尚無法呈現明顯清晰的共振圖案。每一金屬平板，因其面積大小不同和形狀不同，而會有不同的最低共振頻率，稱之為基本頻率(fundamental frequency or base frequency，或簡稱基頻)。
- (5) 實驗開始之前，請先估計各金屬平板的最低共振頻率。實驗開始之際，先從低頻開始起振，至少需低於基頻的頻率。然後慢慢地改變振動信號的頻率，將會發現金屬平板因不同的共振模態，而產生各種不同形狀的共振駐波圖形。
- (6) 切記頻率的改變不能太快，因細砂受平板振動，需要足夠的時間跳動到節點或節線上，並調整其最後停留的位置。且通常共振頻率的頻寬範圍很窄。所以，若頻率調變的太快的話，很容易錯過一些原本應該會出現駐波的共振頻率。此外，也無法獲得穩定且清晰的駐波圖案。
7. 請就本實驗所用的正方形金屬鋁板的共振實驗結果，紀錄下如附錄B圖中所繪出之各種克拉尼圖形的共振頻率。可直接將數據記錄在圖的空白處。
8. 另取圓形金屬平板和小提琴型平板，重複1-7步驟
9. 方形金屬平板上不均勻的受力點或定點的特殊張力對共振頻率與駐波圖形的影響觀測：（以下以手指之力所提供的作用力，可改以作用力勁足夠的小鋼夾取代之）
- (1) 先選擇一具特定共振模態的共振頻率，並記錄下此共振頻率時的駐波圖案。最好先選擇駐波圖案簡單且對稱高的共振頻率和模態。
 - (2) 用手指抓緊金屬平板其中一個邊緣的中心點，觀察此一定點作用力對共振頻率的影響，並觀察駐波圖形如何改變。
 - (3) 改變金屬平板的受指力的位置，使受力位置離邊緣的兩端點分別為 $1/4$ 和 $3/4$ 的位置，再度觀察此一定點作用力對共振頻率的影響，並觀察駐波圖形如何改變。
 - (4) 以手指之力，在金屬平板的任一邊上的任一位置受力，觀察此共振頻率與駐波圖形的受此指力影響情形。
 - (5) 以手指抓緊平板內部不同的位置，再度觀察共振頻率和圖形的變化情形。
 - (6) 另選擇三種不同共振模態的共振頻率，重複(1)至(5)實驗步驟的觀察。
10. 觀測圓形金屬平板上不均勻的受力點或定點的特殊張力對共振頻率與駐波圖形的影響：（以下以手指之力所提供的作用力，可改以作用力勁足夠的小鋼夾取代之）
- (1) 同樣先選擇一具特定共振模態的共振頻率，並記錄下此共振頻率時的駐波圖案。盡量選擇駐波圖案簡單且對稱高的共振頻率和模態。
 - (2) 用手指抓緊圓形金屬平板邊緣的任一點位置，觀察此一定點作用力對共振頻率的影響，並觀察駐波圖形如何改變。
 - (3) 一位同學用兩隻手在圓形金屬平板一直徑兩端的邊緣，以手指緊夾之力使之分別受力，再度觀察此兩定點受力後對共振頻率的影響，並觀察駐波圖形如何改變。

- (4) 讓手指之力作用在圓形金屬平板內部的任一位置點，觀察此共振頻率與駐波圖形的受此指力影響情形。
 - (5) 以手指抓緊圓形平板內部，距離圓心不同遠近時的位置，再度觀察共振頻率和圖形的變化情形，並觀察距圓心距離不同時，對共振頻率和駐波圖形的影響變化又如何。
 - (6) 移動兩受力點的相對位置，觀察共振頻率的影響，及駐波圖形變化的情形
 - (7) 另選擇三種不同共振模態的共振頻率，重複(1)至(7)實驗步驟的觀察。
11. 當振盪波動係經由偏離圓心的位置(off-center position)傳送到圓形金屬平板時，觀測圓形金屬平板之共振頻率與駐波圖形的變化，鬆開原鎖定在圓形金屬平板圓心上的香蕉插座，然後將香蕉插座鎖定於偏離圓形平板中心的小洞上，將可觀察到非圓中心對稱性的駐波圖形。

六、參考資料與網站

1. 參考<http://www.zipped.org/index2.php?&file=cool.salt.wmv>網站，並連接至影片檔案播放，即可觀賞到在方形金屬板上之Chladni Patterns隨外加振動頻率變化所產生的一連串圖形變化。是一部非常完整的實驗紀錄影片。
2. http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/surfaces_curves/chladni/index.html
3. http://en.wikipedia.org/wiki/Ernst_Chladni
4. <http://www.physics.utoronto.ca/nonlinear/chladni.html>: Examples with round, square, stadium plates and violin shapes
5. http://www.physics.montana.edu/demonstrations/video/3_oscillationandwaves/demos/chladniplates.html: Chladni plates
6. http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/surfaces_curves/chladni/index.html: Chladni Plate Mathematics by Paul Bourke
7. <http://www.fas.harvard.edu/~scidem/OscillationsWaves/BigChladniPlate/BigChladniPlate.html>: Electromagnetically driven Chladni plate
8. <http://www.violin-maker.co.uk/construction.html>: Use of Chladni patterns in the construction of violins
9. http://www.phys.unsw.edu.au/~jw/guitar/guitarchladni_engl.html: Chladni patterns for guitar plates
10. <http://www.zipped.org/index2.php?&file=cool.salt.wmv>: A vibrating table, sprinkled with salt, forming Chladni patterns.
11. Rossing T.D. (1982) *Chladni's Law for Vibrating Plates*, American Journal of Physics 50, 271–274.
12. William C. Elmore and Mark A. Heald. *Physics of Waves*. New York: Dover Publications.
13. Hutchins, C.M., The acoustics of violin plates. *Scientific American*, Oct.1981, 170-176
14. Fletcher, N.H. & Rossing, T.D., *The Physics of Musical Instruments*, Springer-Verlag, New York, 1991.
15. Marvin U.B. (1996) *Ernst Florenz Friedrich Chladni (1756–1827) and the origins of modern meteorite research*, *Meteoritics & Planetary Science* 31, 545–588

附錄A：振動器的使用說明

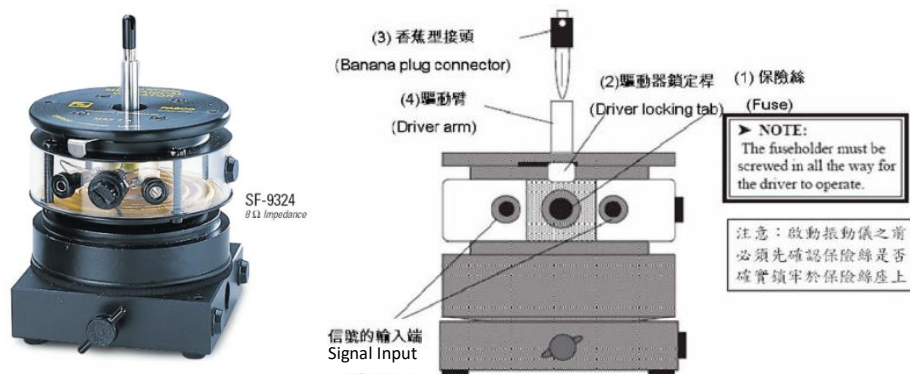
一、振動器簡介

機械波驅動器(mechanical wave driver，以下簡稱振動器)：PASCO SF-9324的實體照片和結構圖顯示於圖A1。PASCO WA-9855結構類似。

振動器的主要部份是一個可提供震動的揚聲器裝置，並附有一個驅動臂(Driver arm)。振動器需外部提供交流訊號以產生振動，然後將振動傳送給其他物體，以進行在不同物體上的波動實驗。當振動頻率在很低頻率($\sim 1\text{ Hz}$)時，峰對峰的振動幅度(peak-to-peak vibrating amplitude)可達約 7 mm 。振動器可接收正弦波、方波、三角波或是鋸齒波等各種不同波形的波源，但本實驗僅使用正弦波。

振動器之儀器規格如下：

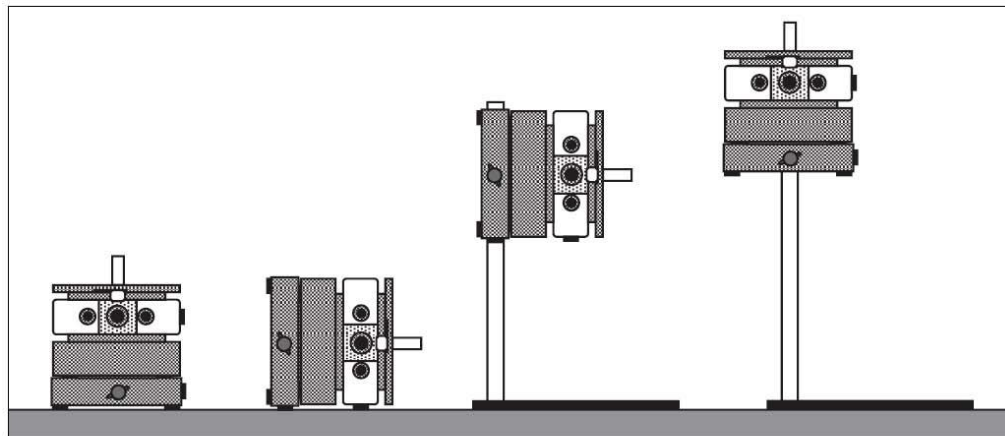
- (1) 通常的信號振動頻率範圍： $0.1\text{ Hz} - 5\text{ kHz}$
- (2) 可提供的波峰對波峰振幅(peak-to-peak amplitude)：頻率 1 Hz 時，約為 7 mm 。振動振幅會隨頻率遞增而遞減。
- (3) 輸入阻抗(input impedance)： $8\ \Omega$ (歐姆)。
- (4) 最大承受電流(maximum current)： 1 A (安培)。以保險絲保護，超過 0.5 A 時可能燒斷保險絲。
- (5) 標定電流(Rated current)： $< 0.25\text{ A}$ 。
- (6) 最大輸入電壓(maximum input voltage)： 0.8 A 電流時，為 6 V 。建議電壓維持小於 2 V 。



圖A1、PASCO SF-9324振動器之結構圖：(1)保險絲(Fuse)，(2)驅動臂鎖定位(Driver locking tab)，(3)香蕉型接頭(Banana plug connector)，(4)驅動臂(Driver arm)，(5)連接信號產生器之放大信號的輸入端(Connect amplified signal from waveform generator)。保險絲應確實鎖緊於保險絲座上。



圖A2、香蕉型插入式接頭(banana plug connectors)，俗稱喇叭端子(speaker terminals)。



Mounting the Mechanical Wave Driver

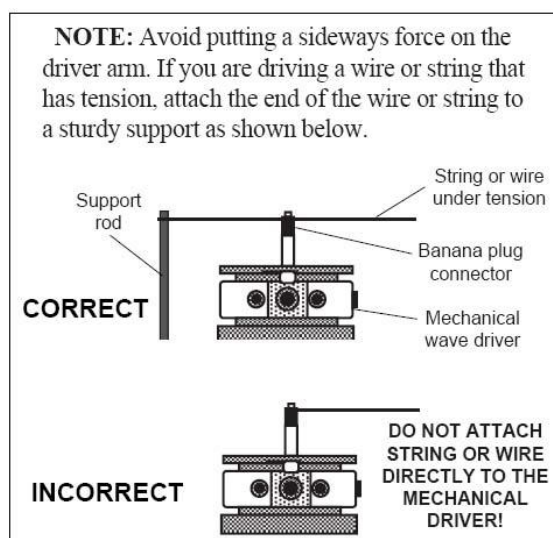
圖A3、振動器的各種架設方式。

二、振動器架設方式

振動器的架設方式如圖A3所示，可直立放置，或轉 90度側面置放(在底座和側面都裝有止滑的橡膠腳墊，以防高強度振動時，振動器產生移動)；也可將之架設在直徑 1/2 英吋的金屬棒上，使之騰空側向架設，或使之可騰空直立放置。

三、與擬振動之物體間的連接方式

可將不同材質的繩線繫牢在香蕉型接頭上，然後再將香蕉型接頭插入驅動臂 (Driver arm) (4) 中，使和振動器連接。圖 A4 顯示繩線連接至振動器的正確接法和錯誤的接法。也可以設計適合實驗用的連接頭，譬如其中一種方式是將一段鋼硬的金屬線 (金屬片) 焊接於香蕉接頭上，然後將鋼硬的金屬線 (片) 依實驗需求彎成所需的角或形狀。
注意：需避免任何側向力 (sideways force) 作用在驅動臂上。如果擬驅動含有張力的細線或繩子振盪，建議如圖所示，將細線或繩子的尾端水平地繫在一個堅固的支撐裝置上或牆壁上。



圖A4 繩線連接到振動器之驅動臂上的正確接法和錯誤接法的示意圖。注意：避免任何側向力(sideways force)作用在驅動臂上。如果擬驅動含有張力的細線或繩子振盪，建議如圖所示，將繩線的尾端水平地繫在一個堅固的支撐裝置上或牆壁上。

四、待驅動體與振動器連接或拆卸時的標準安裝程序

- 1 先將位於振動器頂端的驅動臂鎖桿切到「鎖定(Lock)」的位置，以使驅動臂保持在鎖定狀態，此時外部香蕉插座會和內部驅動軸脫離，使兩者處於互不相連通的分離狀態。如此當驅動臂在連接其他裝置時，可保護揚聲器內部的驅動軸免於因外部連接的動作過大而使之受損傷。
- 2 如圖A1所示或振動器所附的香蕉型插式接頭，將擬被振動的實驗裝置牢固地插接到振動器的驅動臂上。
- 3 使用兩條兩端均為香蕉型接頭的導線將信號產生器的輸出信號連接到振動器前端的香蕉型插座上。
- 4 將驅動臂鎖桿切換至「未鎖定(Unlock)」狀態。
- 5 調整信號產生器之輸出信號的頻率和振幅，以製造振動波所需之振動頻率和振幅。波動振動器的輸入電流(意即放大器的輸出電流)切勿超過 0.5 A。
- 6 若信號開始輸入振動器，但鎖定滑桿尚未切換到「未鎖定 (Unlock)」狀態，則此時振動器會產生非常吵雜的噪音，且物體會呈現不規則的亂振現象。此時請立即關閉信號產生器的信號輸出，並將驅動臂鎖定桿切換至「未鎖定 (Unlock)」狀態，再啟動信號輸入。

7. 做完一個實驗，欲拆卸受振物體時，請將驅動臂鎖定桿再切回「鎖定 (Lock)」位置，才可將香蕉插頭從驅動臂的插座上拆離。
8. 若擬另接一個物體到振動器上，請再仔細地重複 1-7 的安裝步驟。

五、振動信號設定時需注意之事項設定信號產生器之輸出信號時，請注意下列幾件事項：

1. 駐波的模態、共振現象、駐波圖案和形狀取決於振動體的材質、形狀、大小和密度分佈，以及振動信號的頻率。但和振動信號波的振幅大小無關，故請適當地調整信號振幅的大小。通常低頻時，才需要較大的振幅，因低頻信號的波長比較長，單位長度的振動較不明顯，所以需要較大的振幅量。但高頻時，波長短，不需太大的振幅，且太大的振幅加以高頻率的振盪，易使振盪物體吸收太多的共振能量，進而容易導致振盪物體斷裂。故通常信號調至高頻時，記得要將振幅隨之調小，只要調到能夠清楚觀察到波動現象即可。
2. 在二維克拉尼駐波圖案的實驗中，使用細砂觀察駐波圖形。駐波圖案的型態雖僅和信號頻率及平板的大小和形狀有關，與細砂的特性沒有很大的關係。但駐波圖案形成的難易程度和圖形的清晰度則與振動波的振幅大小、細砂粒徑的大小、細砂粒徑的均勻度和細砂量則有密切的關係。欲得清楚穩定的共振圖案，除細砂的粒徑需夠細、粒徑需盡量均一外，細砂的量也需適量，過多或過少均不容易得到清晰的駐波圖案。所以，一開始細砂的量不要多，在實驗過程中，可因需要再逐漸添加細砂的量即可。
3. 振動信號的振幅也要適當。振幅太小，平板的振動振幅有限，細砂不易跳動。但振幅若太大，則細砂跳動幅度太大，不易穩定地停留在節點和節線上，導致駐波圖形不容易穩定成形。所以，一開始先使用小振幅，然後再慢慢調整波動振幅的量，使細砂能得到平穩的跳動，且能夠形成穩定清晰的駐波圖案為準。另也要注意，不同的頻率範圍，波動所需的適當振幅也不同，故需隨頻率的改變，也需隨時重新調整適當的振幅量。
4. 本實驗 E 部份中所使用的三種克拉尼平板的適當振動頻率範圍均在 100 Hz 至 5 kHz，更高頻率範圍當然也會有共振現象產生，但太高頻的共振，所獲得的共振節線將會太密或太複雜，以致在此三個平板尚無法呈現明顯清晰的共振圖案。每一金屬平板，因其面積大小不同和形狀不同，而會有不同的最低共振頻率，稱之為基本頻率 (fundamental frequency or base frequency，或簡稱基頻)。
5. 實驗開始之前，請先估計各金屬平板的最低共振頻率。實驗開始之際，先從低頻開始起振，至少需從低於基頻的頻率開始。然後慢慢地改變振動信號的頻率，將會發現金屬平板因不同的共振模態，而產生各種不同形狀的共振駐波圖形。
6. 切記頻率的改變不能太快，因被振物體或細砂受平板振動，需要足夠的時間跳動到節點或節線上，並調整其最後停留的位置，且通常共振頻率的頻寬範圍很窄，所以，若頻率調變太快的話，很容易錯過一些原本應該會出現駐波的共振頻率。此外，也無法獲得穩定且清晰的駐波圖案。
7. 觀察二維克拉尼共振圖案時，因所用的細砂量有限，請小心並節省使用；盡量避免細砂流失，每次做完實驗，請務必回收。

六、振動器儀器使用注意事項

振動器是本實驗中所有器材中最昂貴的部份，價格不菲，請小心使用。若發現振動器無法振動或有異樣時，請檢查下列事項：

- (1) 首先檢查保險絲。如果保險絲被燒斷，請務必更換相同規格的保險絲，保險絲規格為 1 安培，250 伏特。且在替換後，請確認保險絲座已被完全鎖緊。
- (2) 若保險絲並未燒斷，則檢查保險絲座是否完全旋牢。若以上兩步驟的檢查均沒問題的話，請向助教、老師或普物實驗室技術員報告，絕對不可自行拆卸振動器。

因振動器的振動傳動軸非常精細且敏銳，所以當在連接其他相關組件到振動器的驅動臂上，以使之和驅動軸連接時；或擬將連接於驅動臂上的組件拆除時，很容易因過大的外力，而使驅動軸受傷。因此，請切記下列兩事項：

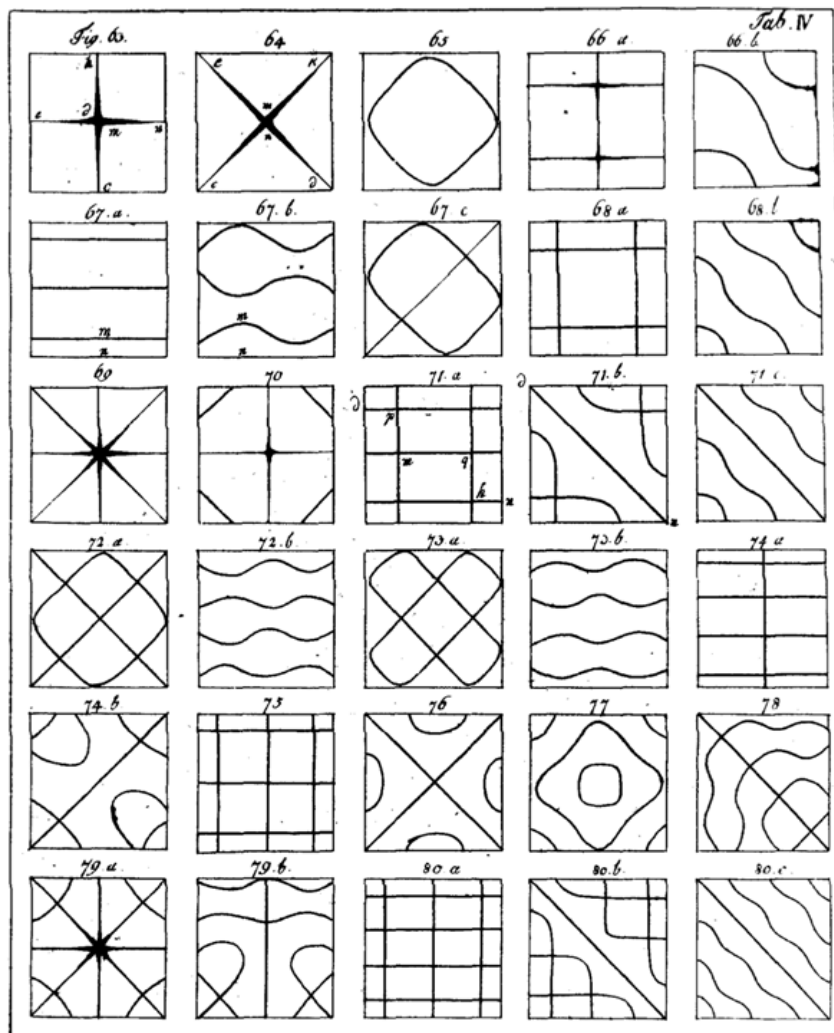
- (1) 不論是要連接配件到驅動臂上或擬從驅動臂上拆除配件時，請務必將振動器上的驅動臂鎖定桿(Driver arm lock/unlock tab)裝置設定到「鎖定(Lock)」狀態，以使驅動臂上的連接插座與傳動軸被隔離，使傳動軸被鎖定，避免外力作用，以保護傳動軸使之避免於連接或拆裝其他組件時受傷害。
- (2) 振盪信號開始輸入振動器之前，也需注意振動器上的驅動臂鎖桿裝置是否已轉「未鎖定(Unlock)」狀態，若未切換到此狀態，則當啟動振動器開關時，會產生非常吵雜的噪音。

附錄B 2D Chladni Patterns

Written by [Paul Bourke](#), March 2003

Ernest Florens Friedrich Chladni (1756 - 1827) performed many experiments to study the nodes of vibration of circular and square plates, generally fixed in the center and driven with a violin bow. The modes of vibration were identified by scattering salt or sand on the plate, these small particles end up in the places of zero vibration. Ernst Chladni first demonstrated this at the French Academy of Science in 1808, it caused such interest that the Emperor offered a kilogram of gold to the first person who could explain the patterns. Fig. 15 is a drawing from Chladni's original publication for the resonance patterns of a square plate and violin-shape plate. Fig. 16 is the Chladni patterns of a square plate published by John Tyndall in 1869.

Chladni patterns are a classic resonance demonstration in a 2 dimensional plate. You can visualize the nodal lines of a vibrating elastic plate by sprinkling sand on it: the sand is thrown off the moving regions and piles up at the nodes. Normally, the plate is set vibrating by bowing it like a violin. It helps to put your fingers on the edge to select the mode you want, much like fingering the strings of a violin. This takes some practice.



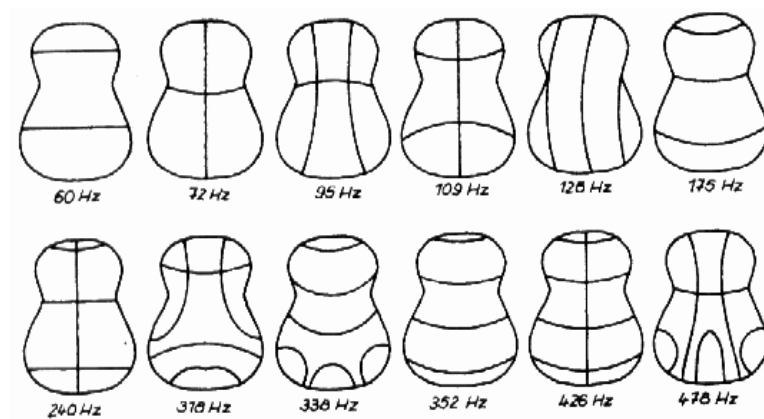


Fig. B1 The resonance patterns of a violin-shape plate and a square plate were drawn from Chladni's original publication.

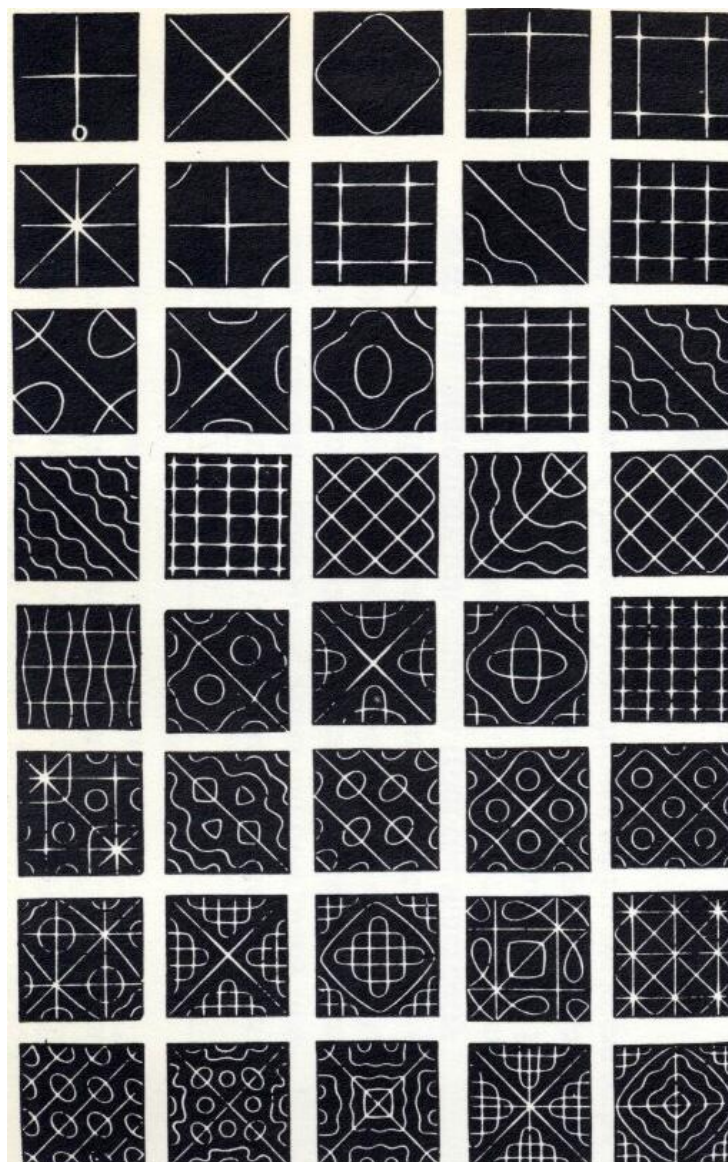


Fig. B2 Chladni patterns published by John Tyndall in 1869.

The basic experiment that is given the name "Chladni" consists of a plate or drum of some shape, possibly constrained at the edges or at a point in the center, and forced to vibrate historically with a violin bow or more recently with a speaker. A fine sand or powder is sprinkled

on the surface and it is allowed to settle. It will do so at those parts of the surface that are not vibrating, namely at the nodes of vibration.

(1) Standing wave on a square Chladni plate (side length L)

The equation for the zeros of the standing wave on a square Chladni plate (side length L) constrained at the center is given by the following.

$$\cos(n\pi x/L) \cdot \cos(m\pi y/L) - \cos(m\pi x/L) \cdot \cos(n\pi y/L) = 0$$

where n and m are integers. The Chladni patterns for n, m between 1 and 5 are shown in Fig. 17, click on the image for a larger version or click on the "continuous" link for the standing wave amplitude maps. Note that the solution is uninteresting for $n = m$ and the lower half of the table is the same as the upper half, namely $(n1, m2) = (n2, m1)$.

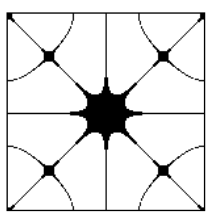
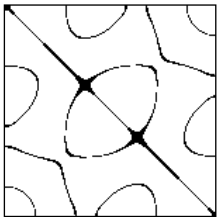
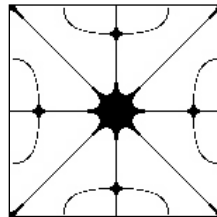
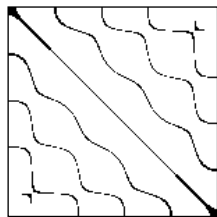
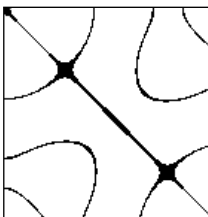
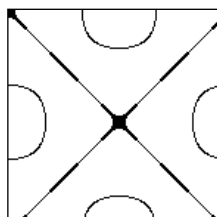
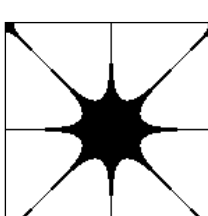
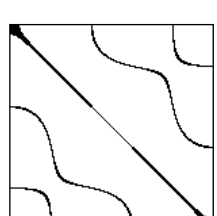
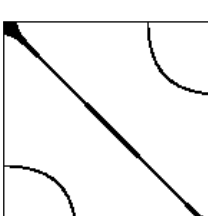
m	1	2	3	4
N=5				
4				
3				
2				

Fig. B3 Various Chladni patterns on a square plate

Without the constraint in the center the modes are somewhat less interesting, the results are shown in Fig. 18 for $m = 1$ and $n = 1$ to 4. The solution is given by:

$$\sin(n\pi x/L_x) \cdot \sin(m\pi y/L_y) = 0$$

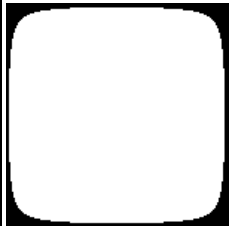
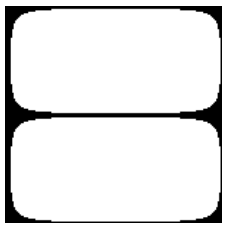
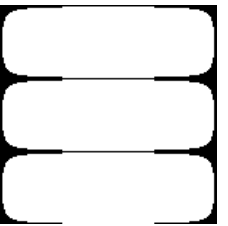
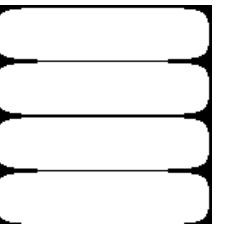
m	1	2	3	4
n / 1				
	<u>Zero --</u> <u>Continuous</u>	<u>Zero --</u> <u>Continuous</u>	<u>Zero --</u> <u>Continuous</u>	<u>Zero --</u> <u>Continuous</u>

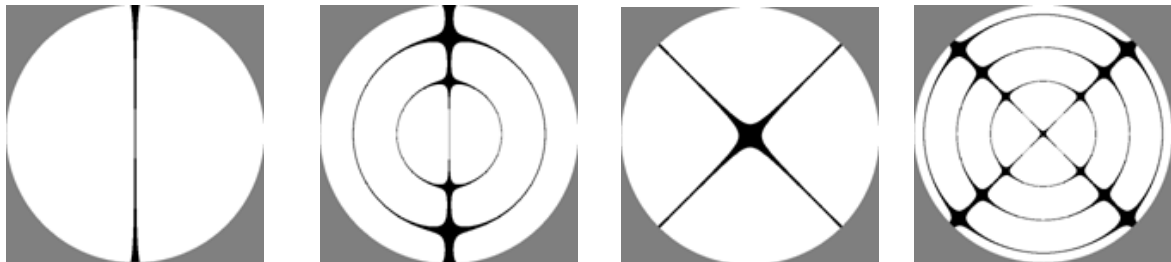
Fig. B4 The Chladni patterns on a square plate for $m = 1$ and $n = 1$ to 4.

(2) Circular plate

For a circular plate with radius R the solution is given in terms of polar coordinates (r, θ) by

$$J_n(Kr) [C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta)]$$

Where J_n is the n 'th order Bessel function. If the plate is fixed around the rim (eg: a drum) then $K = Z_{nm} / R$, Z_{nm} is the m 'th zero of the n 'th order Bessel function. The term " $Z_{nm} r / R$ " means the Bessel function term goes to zero at the rim as required by the constraint of the rim being fixed. Some examples of the node of a circular plate are given in Fig.



$(n, m) = (1, 1)$ Continuous $(1, 3)$ Continuous $(2, 1)$ Continuous $(2, 4)$ Continuous

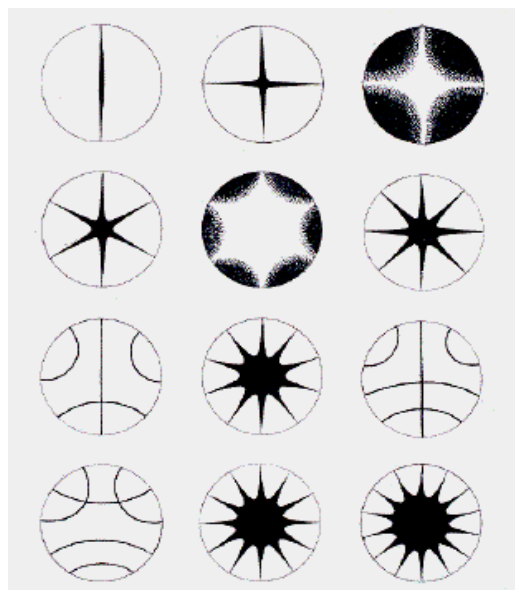


Fig. B5 The Chladni patterns and the nodes of a circular plate

You can make a nice modernized version of this demonstration using an electromagnetic shaker, essentially a powerful speaker. Chladni patterns can also be formed by using circular or rectangular metal plates on a mechanical driver controlled by a signal generator. This method avoids having to practice your bowing. The patterns are now different since they have antinodes at the center (which is being vibrated) rather than nodes with the center rigidly attached and the edge bowed.

Using electromagnetic shaker you can vibrate much larger plates to much higher and purer modes. The shape of the plate is important. The usual demonstrations are round and square plates. Here are some sample patterns: all the plates were 0.125 inch thick Aluminum, painted black.

(1) Round plate (70 cm across, held at centre, bowed): [10 spoke pattern](#), [14 spoke pattern](#)

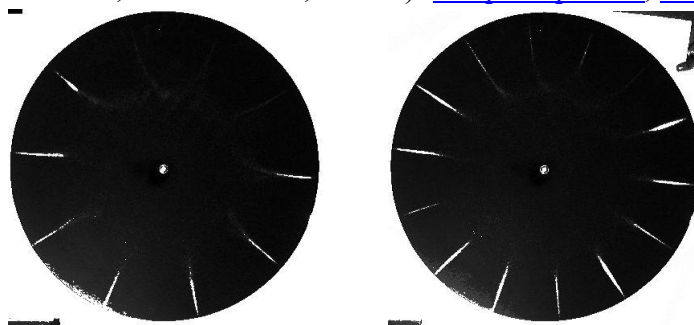


Fig. B6

(2) Square plate (70cm on a side, driven from centre with shaker, frequencies in Hz):

(a) [142.2 Hz](#), (b) [225.0 Hz](#), (c) [1450.2 Hz](#), (d) [3139.7 Hz](#), (e) [3678.1 Hz](#), (f) [5875.5 Hz](#).

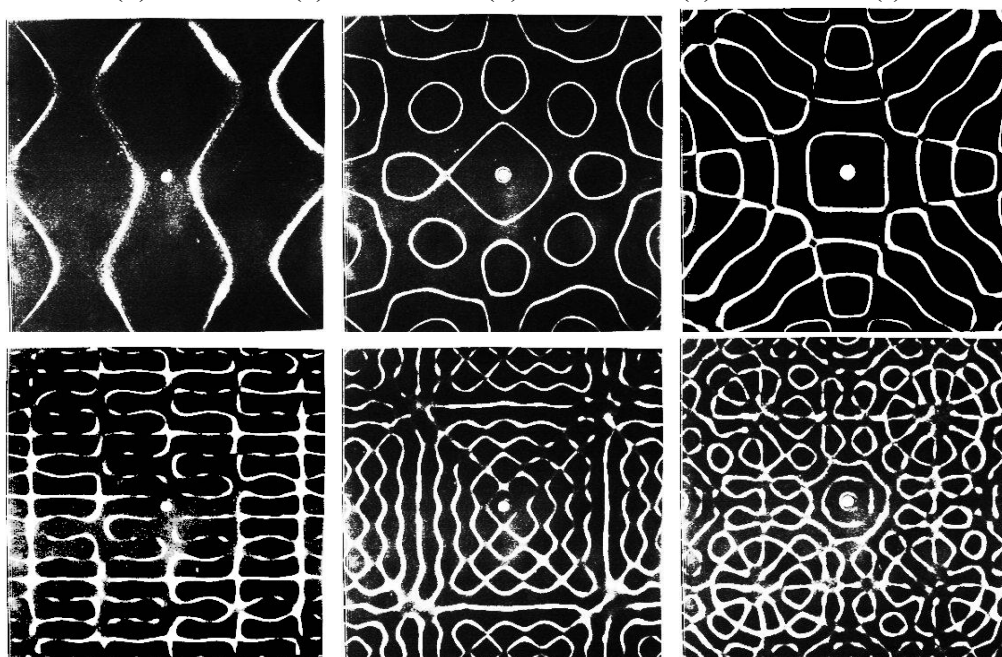


Fig. B7

(3) Finally, getting back to our musical roots, we built a plate in the shape of a large violin.

Here are some patterns:

- **Violin shaped plate** (120cm long, driven from centre with shaker, frequencies in Hz) [145.2](#) , [268.0](#) , [762.4](#) , [954.1](#) , [1452.3](#) , [1743.5](#) , [2238.6](#) .

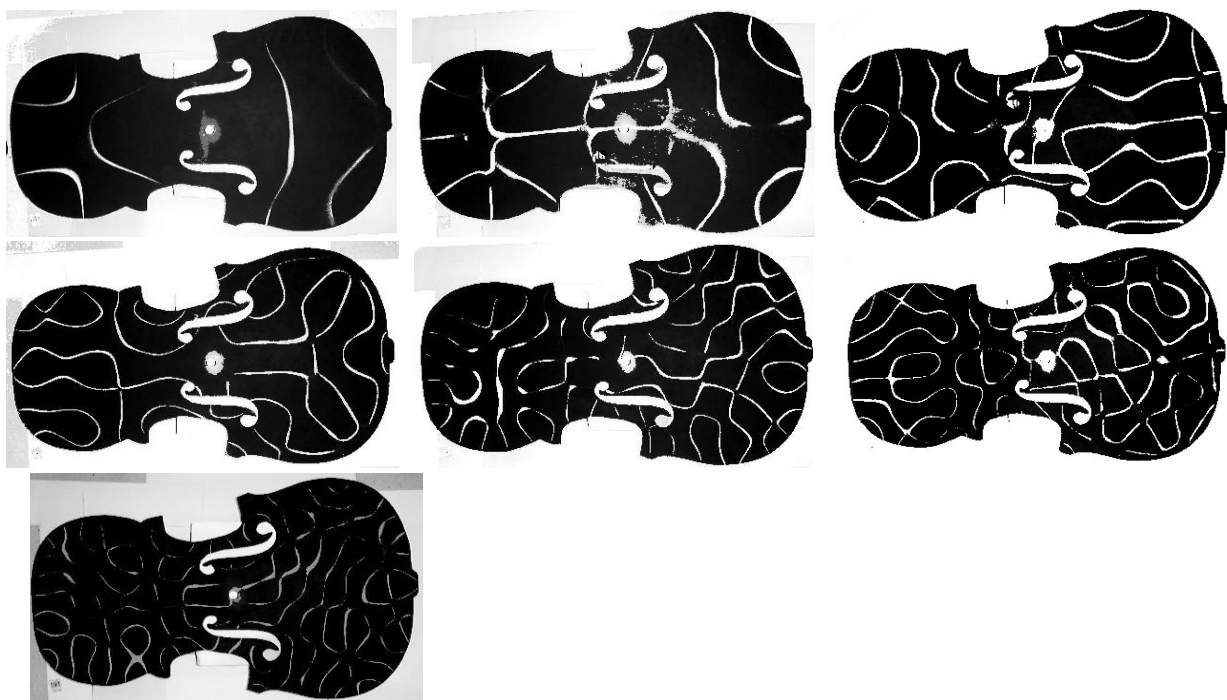


Fig. B8